Wykład 12

Równania różniczkowe (inne metody rozwiązywanie)

Równania różniczkowe jednorodne

PRZYKŁAD: $tyy' = y^2 - t^2$,

OGÓLNIEJ: $y' = g\left(\frac{y}{t}\right)$

podstawienie $\frac{y}{t} = u,\ y = tu,\ y' = u+tu' \implies u+tu = g(u)$ czyli $\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dt}{t}$

PRZYKŁAD: $y' = \frac{t+y}{t}$

Równania różniczkowe drugiego rzędu

$F(y'', y', y, t) = 0$,

Warunki początkowe (dwa): na ogół: $y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1$

sprowadzalne do równania pierwszego rządu

$y'' = f(t, y')$ podstawienie $u = y' \implies u' = f(t, u)$

PRZYKŁAD: $(1 + t^2)y'' + 2ty' = t^3$

$y'' = f(y', y)$ podstawienie $y' = q(y) \implies q\frac{dq}{dy} = f(y, q)$.

PRZYKŁAD: $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Ponieważ dwa wi...
tych samych potęgach zmiennej ...

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = 4 \\ b + 2c = 7 \end{cases}.$$

Stąd $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{11}{4}$, co oznacza, że szukanym rozwiązaniem jest wielomian postaci

$$w(t) = \frac{1}{4}\left(2t^2 + 6t + 11\right).$$

• Przykład 2.4

Scałkować podane równania różniczkowe jednorodne:

a) $y' = \dfrac{t+y}{t}$; **b)** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ty}{t^2 - y^2}$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ

$$\frac{t+y}{t} = 1 + \frac{y}{t},$$

więc rozważane równanie jest równaniem jednorodnym postaci

$$\text{(J)} \qquad y' = f\left(\frac{y}{t}\right),$$

gdzie $f(u) = 1 + u \neq u$. Stosując zatem standardowe podstawienie $y = tu$ mamy $y' = u + tu'$, a równanie przyjmie postać

$$tu' + u = 1 + u, \text{ czyli } u' = \frac{1}{t}.$$

Rozdzielając zmienne, a następnie obustronnie całkując otrzymamy

$$u(t) = \ln|Ct|,$$

gdzie $C \neq 0$. W konsekwencji wracając do zmiennej y otrzymujemy rozwiązanie równania wyjściowego

$$y(t) = t\ln|Ct|, \qquad \text{gdzie } C \neq 0.$$

b) Ponieważ

$$\frac{2ty}{t^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{t}}{1 - \left(\frac{y}{t}\right)^2},$$

$\ln 16 - \ln 7$

4.5 a) $t = \dfrac{\ln 30}{\ln 15 - \ln 7} \approx 4\,\text{h}\ 28\,\text{min}$; **b)** $T(t) = \left(80 - \dfrac{10}{\ln 2}\right) e^{-\frac{\ln 2}{10} t} + 60 - t + \dfrac{10}{\ln 2}\ [^\circ\text{C}]$.

4.6 a) $i(t) = 1.2 - e^{-5t}$; **b)** $i(t) = 1.6 \sin t - 0.8 \cos t + 0.8 e^{-2t}$.

4.7 $y(t) = Ct^2$, gdzie $C > 0$.

Piąty tydzień

Pojęcia wstępne dla równań różniczkowych wyższych rzędów (1.8). Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego (1.9).

Przykłady

Przykład 5.1

Wyznaczyć rozwiązania podanych równanań rzędu drugiego:

a) $\left(1+t^2\right) y'' + 2ty' = t^3$; **b)** $y'' + y' = te^{-t}$.

Rozwiązanie

Oba podane powyżej przykłady są równaniami różniczkowymi rzędu drugiego postaci $F(t, y', y'') = 0$, tzn. takimi, w których nie występuje zmienna y. Wtedy dokonujemy podstawienia $y' = u$, które sprowadza je do równania rzędu pierwszego.

a) Po podstawieniu $y' = u$ mamy

$$\left(1+t^2\right) u' + 2tu = t^3.$$

Równanie to jest równaniem liniowym niejednorodnym. Jeżeli teraz zauważymy, że można je przepisać w postaci

$$\left(\left(1+t^2\right) u\right)' = t^3,$$

to po obustronnym scałkowaniu względem zmiennej t otrzymamy

$$\left(1+t^2\right) u(t) = \frac{1}{4} t^4 + C_1, \quad \text{czyli} \quad u(t) = \frac{1}{4} \frac{t^4}{1+t^2} + \frac{C_1}{1+t^2},$$

gdzie C_1 oznacza dowolną stałą rzeczywistą. Tak więc rozwiązanie wyjściowego równania ma postać

$$y(t) = \int u(t)\, dt = \int \left(\frac{1}{4} \frac{t^4}{1+t^2} + C_1 \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{12} t^3 - \frac{1}{4} t + \tilde{C}_1 \operatorname{arctg} t + C_2,$$

$\left(C_1 + \frac{1}{4}\right)$

Rozdzielając zmienne i obustronnie całkując otrzymamy odpowiednio

$$C_1 y + y^3 = t + C_2 \quad \text{oraz} \quad y(t) \equiv C,$$

gdzie C_1, C_2, C są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

b) Dokonując podanego na wstępie podstawienia rozważane równanie możemy zapisać w postaci

$$2yq\frac{dq}{dy} + q^2 = 0.$$

Mamy więc równanie o zmiennych rozdzielonych. W równaniu tym po sprowadzeniu do postaci (S) mamy $g(y) = \frac{1}{2y}$, $h(q) = -q$. Rozdzielając zmienne otrzymamy

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dy}{2y}.$$

Stąd po obustronnym scałkowaniu dostaniemy

$$\ln|q| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|, \quad \text{czyli} \quad q = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}}, \quad \text{gdzie } y \neq 0 \text{ oraz } C_1 \in R \setminus \{0\}.$$

Zauważmy ponadto, że $h(q) = q = 0 \Longleftrightarrow q = 0$. Mamy zatem jeszcze jedno rozwiązanie $q(y) \equiv 0$. Rozwiązanie to można otrzymać z powyższej całki, jeżeli dopuścimy $C_1 = 0$. Zamieniając teraz q na y' mamy

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{|y|}}.$$

Zatem całka wyjściowego równania różniczkowego ma postać

$$|y|^{\frac{3}{2}} = \tilde{C}_1 t + C_2, \quad \text{gdzie } \tilde{C}_1 = \frac{3}{2}C_1,$$

czyli

$$y = \sqrt[3]{\left(\tilde{C}_1 t + C_2\right)^2} \quad \text{lub} \quad y = -\sqrt[3]{\left(\tilde{C}_1 t + C_2\right)^2},$$

gdzie $\tilde{C}_1$, C_2 oznaczają stałe rzeczywiste.

• Przykład 5.3

Rozwiązać podane równania różniczkowe z zadanymi warunkami początkowymi:

a) $ty'' + y' = 2t, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 1$; **b)** $y'' = y, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Rozwiązanie

a) Podane równanie jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego postaci $F(t, y', y'') = 0$, tzn. takim, w którym nie występuje zmienna y. W tego typu równaniach podstawiamy $y' = u$. Po tym podstawieniu nasze równanie otrzyma postać

$$tu' + u = 2t.$$